PENERAPAN MATRIK DAN ALJABAR VEKTOR PADA MASALAH PENUGASAN DENGAN METODE HUNGARIA

Januari Ritonga

ABSTRAK

Tulisan ini berdasarkan studi literatur penerapan artikel-artikel yang berhubungan dengan penerapan mata kuliah Matrik dan Ruang Vektor. Mata kuliah Matrik dan Ruang Vektor merupakan mata kuliah dasar keahlian di program studi Teknik Informatika dan Sistem Informasi dan sangat berperan dalam menunjang pengetahuan bidang informatika dan sistem informasi. Dalam perkembangannya matrik dan aljabar vektor banyak diterapkan dalam berbagai bidang untuk pemecahan masalah antara lain masalah teknik, ekonomi dan bisnis, kesehatan, komputer grafik, Global Positioning System (SPS),dan pemecahan persolan optimasi khususnya masalah penugasan.
Tulisan ini didasarkan pada pengalaman penulis yang mengajarkan mata kuliah matrik dan ruang vektor dan studi pustaka yang berkaitan dengan masalah penugasan. Masalah penugasan berkonsentrasi pada proses optimalisasi dari sejumlah fasilitas yang akan ditetapkan untuk mengerjakan tugas-tugas yang berbeda, dan setiap kemungkinan penugasan akan menghasilkan suatu biaya tertentu yang optimal dengan menggunakan metode Hungaria.

Kata kunci : Matrik, vektor, penugasan, metode Hungaria

I. PENDAHULUAN

Masalah penugasan (*assignment problem*) adalah menentukan suatu penugasan optimal dalam sebuah matrik biaya tertentu, misalnya dalam menugaskan sebanyak n buah fasilitas atau peralatan untuk n buah lokasi konstruksi, maka C_{ij} dapat berupa jarak antara alat ke-i dengan lokasi ke-j. Penugasan optimal dalam hai ini adalah menentukan penugasan dimana jarak total yang ditempuh untuk memindahkan n fasilitas atau peralatan ke lokasi yang mempunyai nilai minimum.

Masalah mendasar dalam bidang riset operasional adalah menetapkan tugas-tugas pada berbagai fasilitas dengan korespondensi satu ke satu secara optimal, misalnya bagaimana menentukan penugasan terbaik atas pekerja dengan pekerjaannya, atau pemain olah raga dengan posisinya di lapangan dan sebagainya. Masalah penugasan mensyaratkan terdapat fasilitas yang sama banyaknya dengan tugas-tugas yang ada misalnya sebanyak n buah, maka akan terdapat n! (*n faktorial*) cara yang berbeda untuk menetapkan tugas-tugas pada fasilitas dengan korepondensi satu-satu, ini berarti terdapat n cara untuk menetapkan tugas pertama, (n - 1) cara untuk menetapkan tugas kedua, (n - 2) cara untuk menetapkan tugas ketiga dan seterusnya yang secara umum keseluruhan terdapat :

$$\mathbf{n! = n\,.(n - 1).\,(n - 2)\ \dots\ 4.\ \ 3.\ \ 2.\ \ 1}$$

penugasan yang mungkin, dimana diantara n! Kemungkinan penugasan, penulis bermaksud menentukan satu penugasan yang optimal.

Persyaratan bahwa tiap fasilitas dikenai oleh sebuah tugas yang unik atas dasar korepondensi satu ke satu adalah ekuivalen dengan syarat bahwa tidak ada dua ***Cij*** yang berasal dari baris atau kolom yang sama.

II. LANDASAN TEORI

A. Matriks

Matriks adalah suatu jajaran persegi panjang dari bilangan-bilangan atau data-data. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entry dari matriks, dan betnuk umum dari matrik dinyatakan oleh :

$$(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{a_{ij}}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dimana (A) nama matrik, $\mathbf{a_{ij}}$ entri matrik pada baris *ke-i* dan kolom *ke-j*.

Ukuran (size) suatu matrik dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Pada penulisan ukuran, bilangan pertama selalu menunjukkan jumlah baris dan bilangan kedua menunjukan jumlah kolom. Suatu matrik yang hanya terdiri dari satu kolom disebut matrik kolom (vector kolom) dan matrik yang terdiri dari satu baris disebut matrik baris (vector baris). Matrik-matrik yang penting diketahui antaran lain matrik bujursangkar yaitu matrik yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolom, matrik identitas (I) yaitu matrik bujur sangkar yang entri-entri diagonal utama (diagonal arah kanan) bernilai satu dan entri yang lain bernilai nol, matrik segitiga yaitu matrik bujur sangkar yang entri-entri diatas atau dibawah diagonal utama bernilai nol, kemudian ada matriks invers yaitu matrik kebalikan dari matrik asal. Misalkan matrik asal (A) maka matrik invers dinotasikan oleh (A^{-1}).

B. Aljabar Matrik

Seperti halnya dalam masalah bilangan riil yang dapat dioperasikan secara aljabar, matriks juga dapat dioperasikan secara aljabar yaitu operasi penjumlahan, operasi perkalian, demikian juga sifat-sifat operasinya sama dengan sifat-sifat operasi bilangan riil, missal matrik bersifat komutatif, bersifat distributive terhadap hasil kali dengan skalar, dan lainnya.

Definisi penjumlahan matriks : Jika (A) dan (B) adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (A)+(B) adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A.

Sedangkan selisih (A) – (B) adalah matrik yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Definisi perkalian matriks : Jika (A) adalah matriks berukuran (m x r) dan (B) adalah matriks berukuran (r x n), maka hasil kali (AB) adalah matriks (m x n) yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut : untuk mencari entri pada baris ke-i dan kolom ke-j pada (AB), pisahkan baris I dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Misal : Jika diketahui matriks-matriks berikut :

$$(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad (\boldsymbol{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena (A) adlah matriks ukuran (2x3) dan (B) adalah matriks ukuran (3x4), maka hasil kalinya adalah matriks ukruan (2x4), dengan operasi sebagai berikut :

$$(\text{AB}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 16 & 23 \\ 54 & 31 & 43 \end{bmatrix}$$

C. Fungsi Determinan Matrik

Jika mengingat pada fungsi polinom derajat n y = f(x) atau y = sin(x), atau y = e^x , yang mengasosiasikan suatu bilangan riil f(x) dengan suatu nilai riil dari variabel x, maka didalam matriks dan aljabar matriks ada yang disebut “fungsi deteminan “yang merupakan fungsi dari suatu variabel matriks dengan nilai riil yang mengasosiasikan suatu bilangan riil f(x) dengan suatu matriks bujursangkar (A).

Fungsi determinan memiliki peran penting bagi teori penyelesaian system persamaan linier dan dalam pendekatan penyelesaian masalah optimasi penugasan.

Definisi : Misalkan (A) adalah suatu matriks bujursangkar, maka fungsi determinan (determinant function) dinotasikan oleh **det(A)**, dan didefinisikan sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari matriks (A).

Misal : Jika matriks (A) ukuran (2x2) dan (B) matriks ukuran (3x3) :

$$(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{bmatrix}, \quad \text{maka} \quad \mathbf{det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{maka } \mathbf{det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$\mathbf{- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

Perhitungan determinan secara langsung seperti diatas akan menimbulkan kesulitan apabila ukuran matrik besar atau ukuran sangat besar, misalnya ukruan matrik (5 x 5) maka determinannya akan melibatkan 5! = 120 hasil kali elementer bertanda.Oleh karena itu untuk mempermudah perhitungan perlu diketahui sifat-sifat dari fungsi determinan, antara lain melalui operasi reduksi baris, yaitu suatu proses mereduksi matriks yang diberikan menjadi matriks segitiga atas atas segitiga bawah, kemudian menghubungkan deeterminan tersebut dengan matriks aslinya.

Berikut adalah contoh menentukan determinan untuk matriks ukuran (3 x 3) :

Jika $(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$,

maka determinan matriks A dengan mereduksi menjadi matriks eselon (yaitu menjadi matriks segitiga atas) yaitu :

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{-3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix} = (\mathbf{-3})(\mathbf{-55})\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 165$$

Hasil diatas diperoleh melalui langkah-langkah sebagai berikut :

(1). Baris pertama dan kedua dipertukarkan

(2). Suatu factor bersama yaitu 3 dari baris pertama dikeluarkan melewati tanda determinan.

(3). Kalikan -10 bariskeduua ditamb ahkan ke baris ketiga

(4). Suatu factor bersma yaitu -55 dari baris terakhir dikeluarkan melewati tanda determinan.

(5). Jadi determinan matriks (A) = (-3)(-55)(1) = 165

Metode reduksi baris ini sangat sesuai untuk perhitungan determinan dengan computer karena metode ini sistematik dan mudah diprogram .

III. PEMBAHASAN

A. Metode Hungaria Masalah Penugasan

Suatu penugasan dapat didefinisikan sebagai berikut, jika diketahui C adalah suatu matriks (n x n), maka penugasan adalah himpunan dari n posisi-posisi entri, dimana tidak terdapat dua entri yang terletak di dalam baris atau kolom yang sama.

Definisi khusus jika n entri dari sebuah penugasan disebut biaya *(cost)*, maka penugasan dengan biaya terkecil yang mungkin disebut penugasan optimal *(optimal assignment)*, yang dirumuskan oleh

$$(\boldsymbol{C}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{3n} \end{bmatrix}$$

Persyaratan bahwa tiap fasilitas dikenai oleh sebuah tugas yang unik atas dasar korepondensi satu ke satu adalah ekuivalen dengan syarat bahwa tidak ada dua Cij yang berasal dari baris atau kolom yang sama.

Pemecahan optimalisasi masalah penugasan dapat diselesaikan secara langsung dengan pendekatan matriks dan determinan apabila ukuran data atau fasilitas dengan tugasnya berukuran kecil. Apabila sejumlah fasilitas dan tugas-tugasnya berukuran besar (lebih dari 3 x 3) metode langsung didapat lagi digunakan, tetapi dapat dipecahkan dengan metode lain yaitu Metode Hungaria.

Metode Hungaria adalah merupakan metode dengan lima langkah atau prosedur pada sebuah matrik biaya tertentu dengan entri-entri tidak negative yang mengandung sebuah penugasan yang seluruhnya terdiri dari entri-entri nol. Penugasan seperti ini disebut penugasa optimal dari bilangan-bilangan nol) akan menjadi penugasa optimal untuk masalah semula. Metode Hungaria diuraikan dalam table dibawah ini untuk matrik umum berukuran (n x n) :

Tabel 1
Metode Hungaria

Prosedur/Langkah	Keterangan
1. Kurangkan entri terkecil tiap baris pada seluruh entri pada baris tersebut.	Setelah langkah ini, tiap baris mempunyai paling sedikit satu entri nol dan seluruh entri lainnya tak negative.
2. Kurangkan tiap entri terkecil tiap kolom pada seluruh entri pada kolom tersebut.	Setelah tahap ini, tiap baris dan kolom mempunyai paling sedikit satu entri nol dan seluruh entri lainnya tak negative
3. Tariklah garis-garis yang melalui baris-baris dan kolom-kolom yang sesuai sehingga seluruh entri-entri nol matriks biaya dapat tertutup dan jumlah garis-garis yang digunakan adalah minimum.	Terdapat beberapa cara yang mungkin untuk melakukan hal ini. Yang terpenting adalah jumlah garis-garis yang digunakan minimum. Algoritma yang sesuai untuk pemrograman computer tersedia untuk hal ini, meskipun demikian untuk nilai-nilai n kecil, metode trial and error sudah mencukupi.
4. Uji Optimalisasi (i). Jika jumlah garis-garis penutup adalah n, maka penugasan optimal dari bilangan-bilangan nol mungkin tercapai dan metode Hungaria telah selesai. (ii). Jika jumlah minimum garis-garis penutup kurang dari n, maka penugasan optimal dari bilangan-bi langan nol belum memungkinkan. Lanjutkan ke tahap 5.	
5. Tentukan entri terkecil yang tidak tertutup oleh garis manapun. Kurangkan entri ini pada seluruh entri yang tidak tertutup dan kemudian tambahkan entri tersebut keseluruh entri yang tertutup dua kali oleh garis horizontal maupun garis vertikal. Kembali ke tahap 3.	Tahap ini sama dengan menerapkan teorema dengan cara mengurangkan entri tak tertutup terkecil pada tiap baris yang tak tertutup dan kemudian menambahkannya ke tiap kolom yang tak tertutup.

Masalah penugasan dan matriks biaya atau masalah lain yang terkait dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Hungaria apabila memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

1. Matriks biayanya harus berbentuk bujursangkar.
2. Entri-entri matriks biaya harus merupakan bilangan bulat. Untuk penghitungan manual, bilangan bulat sangat memudahkan, sedangkan untuk penghitungan dengan menggunakan alat bantu, bilangan bulat memungkinkan penggunaan bilangan bulat aritmatika yang pasti dan menghindari kesalahan pembulatan. Entri-entri yang tidak bulat sebenarnya dapar diubah menjadi bulat dengan mengalikan matriks biayanya dengan pangkat sepuluh yang sesuai.
3. Masalah penugasan harus merupakan masalah meminimalkan. Masalah pemaksimuman jumlah entri-entri sebuah matriks biaya dapat dengan mudah menjadi masalah peminimuman jumlah tersebut dengan mengalikan tiap entri matriks biaya dengan bilangan negative satu.

B. Studi Kasus

Pada pembahasan berikut akan diuraikan contoh kasus penugasan yang diselesaikan dengan **metode langsung** dan dengan **metode *Hungaria.***

(1). Sebuah perguruan tinggi bermaksud untuk memasang alat penyejuk ruangan (AC) pada tidak gedungnya dalam waktu satu minggu selama musin liburannya. Perguruan tinggi ini mengundang tiga kontraktor agar masing-masing mengajukan penawaran untuk pengerjaan pemasangan AC tersebut. Data penawaran yang diajukan (dalam satuan 1000 dolar) disajikan dalam table berikut :

Setiap kontraktor dapat memasang alat penyejuk ruangan hanya untuk satu gedung selama periode satu minggu, sehingga perguruan tinggi tersebut harus menetapkan kontraktor yang berbeda untuk masing-masing gedung. Pada gedung yang manakah masing-masing kontraktor harus ditugaskan untuk dapat meminimumkan jumlah penawaran yang bersangkutan ?

Tabel 2
Penawaran

Kontraktor	Penawaran		
	Gedung 1	**Gedung 2**	**Gedung 3**
Kontraktor 1	**53**	**96**	**37**
Kontraktor 2	**47**	**87**	**41**
Kontraktor 3	**60**	**92**	**36**

Untuk menyelesaikan masalah ini data penawaran dapat dinyatakan dalam bentuk matrik biaya berukuran (3 x 3) :

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

Dengan ukuran matriks (3 x 3), maka akan terdapat 3! = 6 kemungkinan penugasan dan penyelesaiannya dapat digunakan metode langsung dengan pendekatan determinan dengan cara menghitung biaya masing-masing penugasan tersebut dengan tidak melibatkan entri pada baris atau kolom yang sama. Degan cara menandai entri-entri yang berhubungan dengan masing-masing dari enam kemungkinan penugasan kemudain menghitung jumlahnya yaitu,

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

53+87+36 = 176

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

53+92+41 = 186

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

47+96+36 = 179

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

47+92+37 = 176

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

60+96+41 = 197

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

60+87+37 = 184

Dari hasil perhitungan dapat dilihat bahwa penawaran total tersebut berkisar dari minimum sebesar $ 176.000 sampai dengan maksimum $ 197.000, dan dapat diputuskan kemungkinan penugasannya satu dari dua cara berikut :

Kontraktor 1 ditugaskan pada gedung 1		***Kontraktor 1 pada gedung 3***
Kontraktor 2 ditugaskan pada gedung 2	***atau***	***Kontraktor 2 pada gedung 1***
Kontraktor 3 ditugaskan pada gedung 3		***Kontraktor 3 pada gedung 2***

(2). Kasus kedua ini berukuran (4 x 4), misalkan sebuah perusahaan konstruksi mempunyai empat alat berat bulldozer yang terletak di empat lokasi berbeda. Alat-alat berat tersebut hendak dipindahkan ke empat lokasi konstruksi yang berbeda jaraknya (dalam mil). Data jaraj antara alat-alat berat dengan lokasi konstruksi disajikan dalam table dibawah ini :

Tabel 3
Jarak dari Pool ke Lokasi

	Lokasi Konstruksi			
Kontraktor	**1**	**2**	**3**	**4**
Buldoze-1	**90**	**75**	**75**	**80**
Buldoze-2	**35**	**85**	**55**	**65**
Buldoze-3	**125**	**95**	**90**	**105**
Buldoze-4	**45**	**110**	**95**	**115**

Bagaimana bulldozer-buldozer itu harus dipindahkan ke lokasi konnstruksi dalam upaya untuk meminimumkan jarak total yang ditempuh yang tentunya akan mengakibatkan biaya operasionalnya minimum.

Untuk menyelesaikan masalah penugasan kasus ini akan digunakan metode Hungaria karena ukuran matriksnya besar.

Dengan menuliskan data diatas dalam bentuk matriks maka :

$$\begin{vmatrix} 90 & 75 & 75 & 80 \\ 35 & 85 & 55 & 65 \\ 125 & 95 & 90 & 105 \\ 45 & 110 & 95 & 115 \end{vmatrix}$$

Langkah 1. Kurangkan 75 pada baris pertama matriks diatas, kurangkan 35 pada baris kedua, kurangkan 90 pada baris ketiga, dan kurangkan 45 pada baris keempat untuk mendapatkan matriks yang hasilnya adalah matriks dibawah ini.

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 50 & 20 & 30 \\ 35 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 65 & 50 & 70 \end{vmatrix}$$

Langkah 2. Ketiga kolom matrik diatas telah mengandung entri-entri nol, sehingga kita hanya perlu mengurangkan 5 pada kolom keempat. Hasilnya matriks berikut :

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{vmatrix}$$

Langkah 3. Tutupilah entri-entri nol matrik diatas dengan jumlah minimum garis-garis vertikal dan horizontal. Hal ini dapat dilakukan dengan cara pertama-tama mencoba untuk menutup bilangan-bilangan nol dengan satu garis, kemudain dua garis, dan akhirnya tiga garis.

Langkah 4. Karena jumlah minimum garis-garis yang digunakan pada langkah 3 adalah tiga garis, maka penugasan optimal dari bilangan-bilangan nol masih belum memungkinkan.

Langkah 5. Kurangkan 20, entri tidak tertutup kecil matriks diatas, pada tiap entri tidak tertutup dan ditambahkan 20 ini pada dua entri yang tertutup dua garis. Hasilnya adalah seperti berikut :

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 55 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 53 & 45 \end{vmatrix}$$

Langkah 6. Tutupilah entri-entri nol matriks diatas dengan garis-garis vertikal dan horizontal dala jumlah seminimum mungkin.

Langkah 7. Karena jumlah garis yang telah dibuat tetap tiga, maka penugasan optimal dari bilangan-bilangan nol masih melum memungkinkan.

Langkah 8. Kurangkan 5, entri tidak tertutup terkecil matriks diatas, pada tiap entri tidak tertutup dan tambahkan 5 ini pada dua entri yang tertutup dua garis. Hasilnya adalah sebagai berikut :

40	0	5	0
0	25	0	0
55	0	0	5
0	40	30	40

Langkah 9. Tutupilah entri-entri nol matriks diatas dengan garis-garis vertikal dan horizontal dalam jumlah seminimum mungkin.

Langkah 10. Karena entri-entri nol matriks diatas tidak dapat ditutup dengan garis-garis yang jumlahnya kurang dari empat, maka matriks ini telah mengandung penugasan optimal dari bilangan-bilangan nol.

Dengan demikian matriks terakhir memberikan dua alternative penugasan yang berbeda yaitu :

40	0	5	0
0	25	0	0
55	0	0	5
0	40	30	40

Penugasan-1

40	0	5	0
0	25	0	0
55	0	0	5
0	40	30	40

Penugasan-2

- Buldozer 1 ke lokasi konstruksi 4
- Buldozer 2 ke lokasi konstruksi 3
- Buldozer 3 ke lokasi konstruksi 2
- Buldozer 4 ke lokasi konstruksi 1

Dengan jarak tempuh minimum 80+55+95+45 = 275 mil

Penugasan kedua adalah ;

- Buldozer 1 ke lokasi konstruksi 2
- Buldozer 2 ke lokasi konstruksi 4
- Buldozer 3 ke lokasi konstruksi 3
- Buldozer 4 ke lokasi konstruksi 1

Dengan jarak tempuh minimum 75+65+90+45 = 275 mil

IV. KESIMPULAN

Matrik dan aljabar vektor, serta determinan matriks banyak diterapkan dalam berbagai bidang untuk pemecahan masalah antara lain masalah teknik, ekonomi dan bisnis, kesehatan, komputer grafik, Global Positioning System (SPS),dan pemecahan persolan optimasi khususnya masalah penugasan. Matriks dan Aljabar Vektor dalam tulisan ini digunakan untuk kasus optimalisasi dengan metode langsung dan untuk penugasan berukuran besar menggunakan metode Hungaria.

V. DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard,. Chris Rorres, 2004, "*Aljabar Linier Elementer* ", Jilid 1, 2, ed. Kedelapan, Jakarta, Erlangga.

Agustinus Nalwan, "*Pemograman Animasi dan Game Professional 1,2 dan 3*".

Isriyanto, Kharis., 2015, "*Penerapan Aljabar Vektor pada GPS (Global Positioning System)"*, Informatika ITB.

Leon, Steven J., 2001,"*Aljabar Linier dan Aplikasinya"*, edisi kelima, Jakarta, Erlangga

P. Insap Santosa, Ir., M.Sc., 1994, "*Grafika Komputer dan Antarmuka Grafis*", Penerbit Andi Offset Yogyakarta, Cetakan Pertama,

Rahadian Hadi, 2001,"*Pemrograman Window API dengan Microsof Visual Basic*, Jakarta, PT. Elex Media Komputindo.

Sunaryat, Anang, 2003, Pemodelan dan Operasi Grafik Vektor Surface 3D , Bandung

Strang, Gilbert 2006, " Linier Algebra and It's Application, 4^{th} ed. Publisher, Thomson, Brooks Cole.

http://3Dblackhole.base.org "*Mathematics of 3D Graphics*".

http://3Dblackhole.base.org "*3D Transformations Second part of The 3D Coding Blackhole Tutorial*